

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 2

31 de octubre de 2023

Zona A tarde | Zona B tarde | Zona C tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

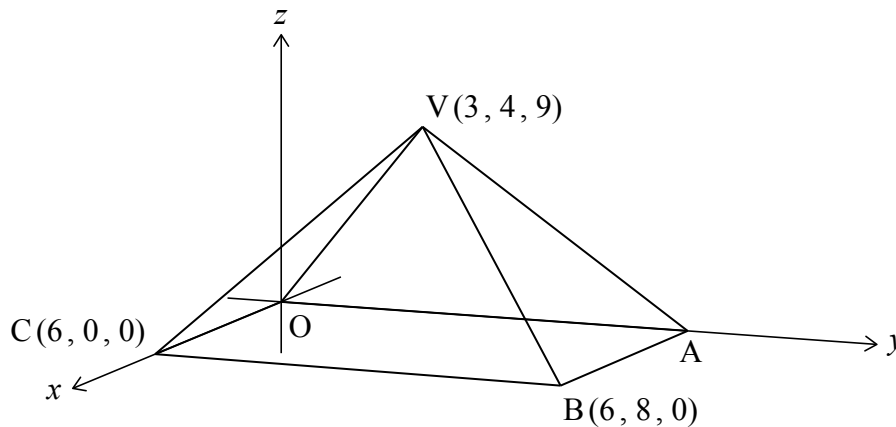
Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra una pirámide de vértice V y base rectangular $OABC$.

El punto B tiene por coordenadas $(6, 8, 0)$, el punto C tiene por coordenadas $(6, 0, 0)$ y el punto V tiene por coordenadas $(3, 4, 9)$.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle BV . [2]

(b) Halle el tamaño de $B\hat{V}C$. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



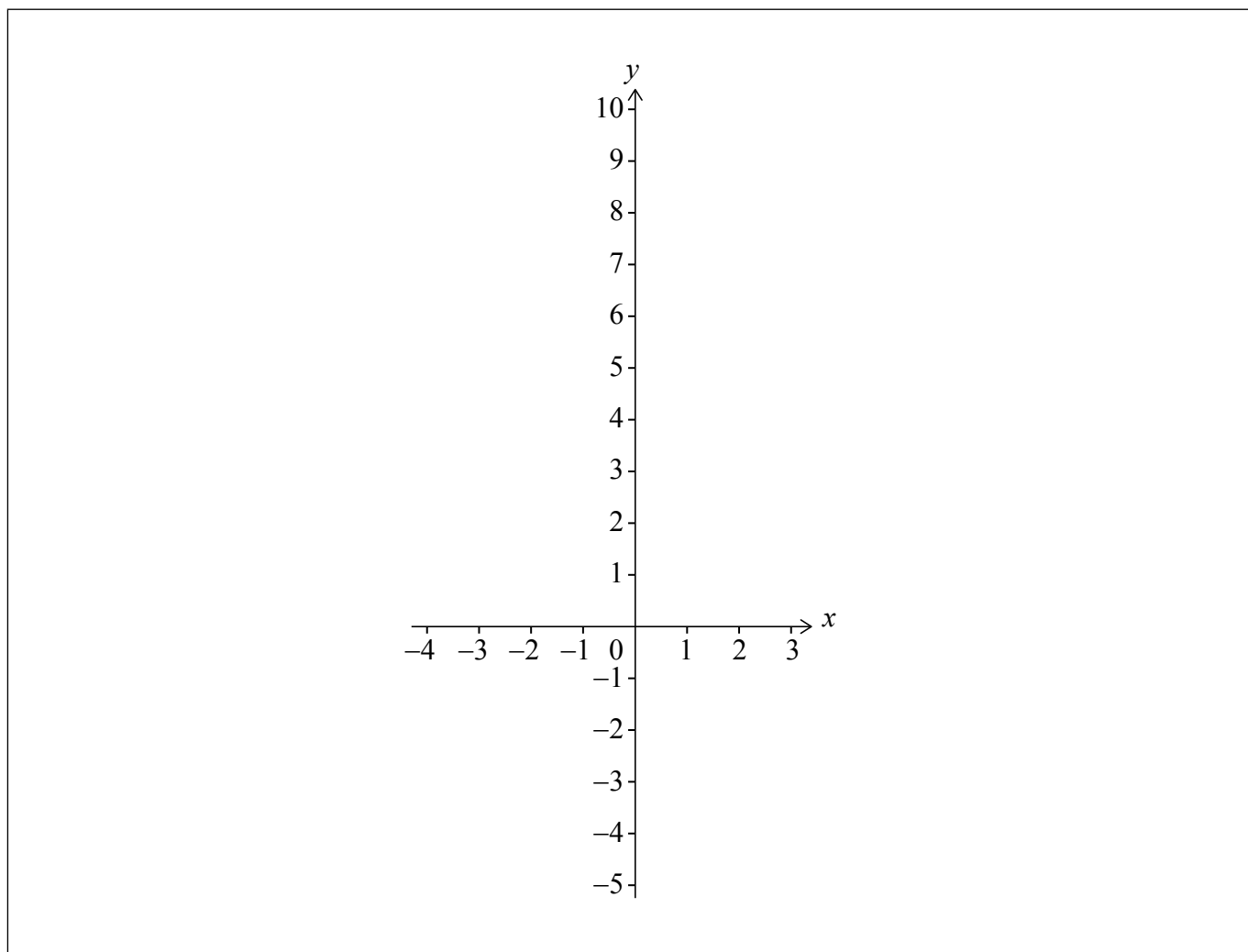
Véase al dorso

2. [Puntuación máxima: 5]

Considere la función $f(x) = e^x - 3x - 4$.

(a) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de f para $-4 \leq x \leq 3$.

[3]



La función g viene dada por $g(x) = e^{2x} - 6x - 7$.

(b) El gráfico de g se obtiene a partir del gráfico de f , mediante un estiramiento horizontal de razón k seguido de una traslación vertical de c unidades.

Halle el valor de k y el valor de c .

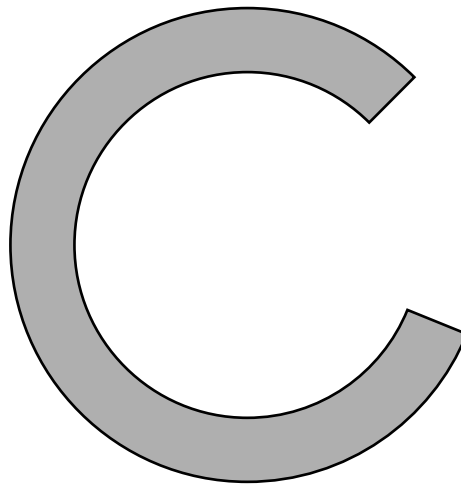
[2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



3. [Puntuación máxima: 7]

Una empresa está diseñando un nuevo logotipo con forma de la letra "C".



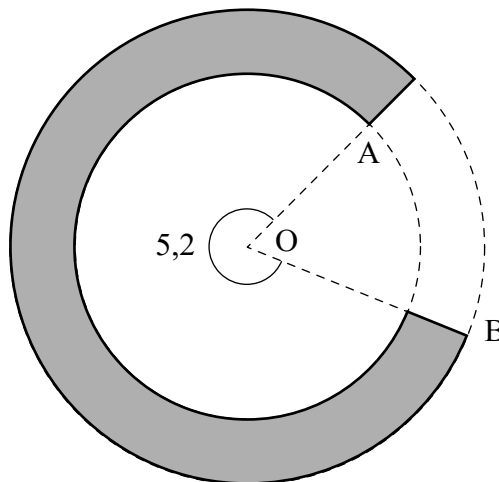
La letra "C" está formada por dos círculos con centro en O .

El punto A pertenece a la circunferencia del círculo interior, de radio r cm, donde $r < 10$.

El punto B pertenece a la circunferencia del círculo exterior, de radio 10 cm.

El ángulo cóncavo \widehat{AOB} mide 5,2 radianes. La letra "C" se representa en la siguiente figura; es la zona sombreada.

la figura no está dibujada a escala



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



8. [Puntuación máxima: 9]

Sean tres puntos $A(0, p, 2)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(p, 0, 4)$, donde p es una constante positiva.

(a) Muestre que $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-3p \\ -2-p \\ p^2-2p \end{pmatrix}$. [4]

(b) A partir de lo anterior, halle el valor más pequeño posible de $|\vec{AB} \times \vec{AC}|^2$. [3]

(c) A partir de lo anterior, halle el área más pequeña posible del triángulo ABC . [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 16]

Un agricultor está cultivando un campo de trigo. La altura (H cm), de cada planta de trigo se puede modelizar mediante una distribución normal de media μ y desviación típica σ .

Se sabe que $P(H < 94,6) = 0,288$ y $P(H > 98,1) = 0,434$.

- (a) Halle la probabilidad de que la altura de una planta elegida al azar esté comprendida entre 94,6 cm y 98,1 cm. [2]
- (b) Halle el valor de μ y el valor de σ . [5]

El agricultor mide la altura de 100 plantas elegidas al azar. Todas las plantas que tengan una altura superior a 98,1 cm se considera que están listas para la cosecha. Las alturas de las plantas son independientes una de otra.

- (c) (i) Halle la probabilidad de que haya exactamente 34 plantas que estén listas para la cosecha.
- (ii) Sabiendo que hay menos de 49 plantas que estén listas para la cosecha, halle la probabilidad de que haya exactamente 34 plantas que estén listas para la cosecha. [6]

En otro terreno, el agricultor está cultivando la misma variedad de trigo pero está utilizando un fertilizante distinto. Las alturas de estas plantas (F cm) siguen una distribución normal de media 98,6 y desviación típica igual a d . El agricultor averigua que el rango intercuartil es igual a 4,82 cm.

- (d) Halle el valor de d . [3]



No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 19]

Considere la función f que viene dada por $f(x) = \frac{x^2 - 14x + 24}{2x + 6}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$.

(a) Indique la ecuación de la asíntota vertical del gráfico de f . [1]

(b) Halle las coordenadas de los puntos donde el gráfico de f corta al eje x . [2]

El gráfico de f tiene también una asíntota oblicua que es de la forma $y = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{Q}$.

(c) Halle el valor de a y el valor de b . [4]

(d) Dibuje aproximadamente el gráfico de f para $-50 \leq x \leq 50$, mostrando claramente las asíntotas y todas las intersecciones con los ejes que haya. [4]

(e) Halle el recorrido de f . [4]

(f) Resuelva la inecuación $f(x) > x$. [4]



No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 18]

La recta L viene dada por la ecuación vectorial $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ donde $s \in \mathbb{R}$.

La recta M viene dada por la ecuación vectorial $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donde $t \in \mathbb{R}$.

(a) Muestre que las rectas L y M se cortan en un punto A y halle el vector de posición de A . [5]

(b) Verifique que las rectas L y M pertenecen las dos al plano Π que viene dado por $\mathbf{r} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 7$. [3]

El punto B tiene por vector de posición $\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$. Una recta que pasa por B y es perpendicular a Π corta a Π en el punto C .

(c) (i) Halle el vector de posición de C .
 (ii) A partir de lo anterior, halle $|\vec{BC}|$. [7]

(d) Halle la simetría del punto B respecto al plano Π . [3]

